ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
районный/муниципальный тур, 5 февраля 2022 г., XII класс

12.1. Сравните:

$$\int_{-1}^{0} \frac{2x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+2}\,dx \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{6}.$$

12.2. Прямоугольники $MNPQ$ и $ABCD$ лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях так, что точки M, N, A, D принадлежат одной прямой и $MN = a,\ NP = b,\ AB = c,\ AD = d$. Найдите величину угла между прямыми MP и BD.

12.3. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1+43^{4042} & 43^{2021}+47^{4042} & 47^{2021}+1 \\ 1+43^{6063} & 43^{4042}+47^{6063} & 47^{4042}+1 \\ 1+43^{8084} & 43^{6063}+47^{8084} & 47^{6063}+1 \end{pmatrix}$.
Докажите, что $detA$ делится на число $2021^{2021} \cdot 2022$.

12.4. Найдите все пары дифференцируемых функций (f, g), $f, g\colon \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ такие, что функция $u\colon \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $u(x) = \mathrm{tg}x \cdot f(x)$, является первообразной функции g, а функция $v\colon \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $v(x) = \mathrm{tg}x \cdot g(x)$, является первообразной функции f.

12.5. Пусть z_1, z_2, z_3 комплексные числа такие, что $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ и $(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)^2 = z_1z_2z_3$. Докажите, что $(z_1 + z_2 + z_3)^{2021} = z_1^{2021} + z_2^{2021} + z_3^{2021}$.

Время работы: 240 минут.
Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. **ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!**

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
районный/муниципальный тур, 5 февраля 2022 г., XII класс

12.1. Сравните:

$$\int_{-1}^{0} \frac{2x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+2}\,dx \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{6}.$$

12.2. Прямоугольники $MNPQ$ и $ABCD$ лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях так, что точки M, N, A, D принадлежат одной прямой и $MN = a,\ NP = b,\ AB = c,\ AD = d$. Найдите величину угла между прямыми MP и BD.

12.3. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1+43^{4042} & 43^{2021}+47^{4042} & 47^{2021}+1 \\ 1+43^{6063} & 43^{4042}+47^{6063} & 47^{4042}+1 \\ 1+43^{8084} & 43^{6063}+47^{8084} & 47^{6063}+1 \end{pmatrix}$.
Докажите, что $detA$ делится на число $2021^{2021} \cdot 2022$.

12.4. Найдите все пары дифференцируемых функций (f, g), $f, g\colon \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ такие, что функция $u\colon \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $u(x) = \mathrm{tg}x \cdot f(x)$, является первообразной функции g, а функция $v\colon \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $v(x) = \mathrm{tg}x \cdot g(x)$, является первообразной функции f.

12.5. Пусть z_1, z_2, z_3 комплексные числа такие, что $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ и $(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)^2 = z_1z_2z_3$. Докажите, что $(z_1 + z_2 + z_3)^{2021} = z_1^{2021} + z_2^{2021} + z_3^{2021}$.

Время работы: 240 минут.
Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. **ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!**