ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
районный/муниципальный тур, 4 февраля 2023 г., IX класс

9.1. Определить все функции первой степени $f: R \to R$, удовлетворяющие соотношению

$$\frac{1}{20} \cdot f(x) - \frac{1}{23} \cdot f(x-1) = 3x + 26.$$

9.4. Пусть $MNPQ$ — трапеция с $MN \parallel PQ$, $MN > PQ$. Окружность, проходящая через вершины P и Q, касается основания MN в точке B, пересекает боковые стороны MQ и NP в точках A и C соответственно так, что мера угла PBQ равна 50^0, а углы MNP и MQB равны. Найдите градусную меру угла ABC.

9.3. Найдите все тройки ненулевых натуральных чисел (n, a, b), которые одновременно удовлетворяют следующим условиям:

1) $a - b = 10$; 2) $a \cdot b = \underbrace{99\,.\,.\,.\,99}_{n \text{ цифр}}$.

9.4. Докажите, что $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{9}{13}$ для любого $n \in N^*$, $n \geq 2$.

9.5. Определить все ненулевые натуральные числа n, для которых уравнение $x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] + \frac{1}{x} \cdot [x] = \frac{n}{n+1}$ имеет точно 2^{2023} различных положительных решения. (Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x).

Время работы: 240 минут.
Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. **ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!**

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
районный/муниципальный тур, 4 февраля 2023 г., IX класс

9.1. Определить все функции первой степени $f: R \to R$, удовлетворяющие соотношение

$$\frac{1}{20} \cdot f(x) - \frac{1}{23} \cdot f(x-1) = 3x + 26.$$

9.4. Пусть $MNPQ$ — трапеция с $MN \parallel PQ$, $MN > PQ$. Окружность, проходящая через вершины P и Q, касается основания MN в точке B, пересекает боковые стороны MQ и NP в точках A и C соответственно так, что мера угла PBQ равна 50^0, а углы MNP и MQB равны. Найдите градусную меру угла ABC.

9.3. Найдите все тройки ненулевых натуральных чисел (n, a, b), которые одновременно удовлетворяют следующим условиям:

1) $a - b = 10$; 2) $a \cdot b = \underbrace{99\,.\,.\,.\,99}_{n \text{ цифр}}$.

9.4. Докажите, что $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{9}{13}$ для любого $n \in N^*$, $n \geq 2$.

9.5. Определить все ненулевые натуральные числа n, для которых уравнение $x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] + \frac{1}{x} \cdot [x] = \frac{n}{n+1}$ имеет точно 2^{2023} различных положительных решения. (Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x).

Время работы: 240 минут.
Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. **ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!**